¿Es la mecánica cuántica realmente tan rara?

J. Gómez-Camacho
Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Facultad de Física,
Universidad de Sevilla, Apartado 1065, 41080 Sevilla, Spain.

March 25, 2003

Abstract

Se utiliza el formalismo de la matriz densidad para comparar la mecánica clásica con la mecánica cuántica. En el formalismo de la matriz densidad, se revisan cuestiones problemáticas de la mecánica cuántica, como la paradoja del gato de Schrödinger, el problema de la medida, el experimento EPR y las desigualdades de Bell. Se pone de manifiesto que la diferencia fundamental entre la mecánica clásica y la cuántica, que es la existencia en esta última del entrelazamiento (entanglement).

1 Introducción

El estudiante de física que se encuentra por primera vez con la mecánica cuántica suele sentirse perplejo. Anteriormente, en la física clásica, ha tenido que habérselas con conceptos sencillos (posición, velocidad), o complicados (entropía, campo magnético), que corresponden a magnitudes que pueden medirse, y que sirven para describir el estado de un sistema. Cuando inicia el estudio de la mecánica cuántica, debe aceptar que el estado de un sistema se describe por la función de onda, que no puede "medirse", mientras que los resultados de una observación vienen descritos de forma probabilística por ciertos operadores actúan sobre la función de onda.

Conforme el estudiante avanza en su formación, realiza un doctorado, y se convierte en un físico profesional, en alguna de las múltiples ramas de la física cuántica, suele olvidarse de su perplejidad inicial. Si es un físico teórico, calculará niveles de energía, secciones eficaces, o bandas de energía operando con naturalidad con las ecuaciones cuánticas correspondientes, sin preocuparse de lo que hacen los operadores de medida sobre sus funciones de onda. Si es un físico experimental, se preocupará de los detectores, las cadenas electrónicas, las eficiencias, las estadísticas de recuento, considerando que las partículas que observa son entes perfectamente definidos, que tienen unas características, por ejemplo su posición y su energía, que pueden ser determinadas por la interacción con los aparatos. Físicos teóricos y experimentales pueden colaborar estrechamente, calculando los primeros probabilidades a partir de la función de onda, y midiendo los segundos frecuencias en sus aparatos, sin necesidad de preocuparse sobre qué sucede a la función de onda del sistema durante la medida.

Podría concluirse de ésto que el problema de la medida, y otros problemas conceptuales de la mecánica cuántica, no son importantes, que son simplemente problemas semánticos. No obstante, estos problemas han preocupado a las grandes figuras de la física cuántica, como Bohr y Einstein, y siguen preocupando a muchos físicos. Además, los desarrollos recientes en la criptografía y la computación cuántica hacen entrever que las "rarezas" de la mecánica cuántica, como el entrelazamiento (entanglement) de los estados cuánticos, pueden tener aplicaciones tecnológicas en un futuro próximo.

Este artículo pretende revisar algunas de las rarezas de la mecánica cuantica, en comparación con la descripción clásica correspondiente. La herramienta principal para el análisis de estas cuestiones es la matriz densidad, que se introduce en el capítulo 2. Esta herramienta permite que el formalismo de la mecánica clásica y la mecánica cuántica sean análogos. Con ello pretendemos destacar las diferencias fundamentales entre los tratamientos clásico y cuántico, sin distraernos por las diferencias aparentes que provienen del lenguaje diferente. En el capítulo 3 se trata la paradoja del gato de Schrödinger. En el capítulo 4 se trata el problema de la medida. En el capítulo 5 se tratan las correlaciones cuánticas. El capítulo 6 es para resumen y conclusiones.

2 La matriz densidad.

En mecánica clásica, el movimiento de una partícula puede describirse a través de su trayectoria. Las ecuaciones del movimiento permiten obtener la posición y el momento en cada instante de tiempo, a partir de su valor en un instante inicial. No obstante, el conocimiento exacto de la posición y el momento de una partícula es una abstracción. En la práctica, siempre existen errores en la determinación de cualquier magnitud. Por ello, es más realista describir un sistema clásico en un instante dado por una distribución probabilística de sus coordenadas y momentos, que se denomina densidad de espacio fásico, y viene dada por $\rho^c(r,p,t)$. Esta función es positiva para todos los valores de r y p, y su integral para todos los valores de r y p es la unidad.

Debe destacarse que la densidad de espacio fásico es una magnitud que mide nuestro conocimiento del sistema. Por ello, no es sorprendente que, como resultado de una medida, que permita aumentar nuestro conocimiento del sistema, podamos pasar de una matriz densidad a otra más restrictiva, es decir, que esté localizada en una región más limitada del espacio fásico. En este sentido, la descripción más completa posible de un sistema clásico corresponde a una única trayectoria clásica, aunque este es siempre un caso ideal, inalcanzable a efectos prácticos.

En mecánica cuántica existe una situación similar. Un sistema puede describirse, en principio, a partir del conocimiento del vector estado $|i(t)>$, o, lo que es equivalente, de la función de onda $\phi_i(r,t)$. No obstante, ello requiere el conocimiento exacto del sistema. De forma más general, el sistema se describe como una mezcla estadística de diferentes funciones de onda, a través del llamado operador densidad o matriz densidad, que viene dado, en término de operadores, por

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |i(t)><i(t)| \tag{1}$$

o bien, en representación de coordenadas, por

$$\rho(r',r;t) = \sum_i p_i \phi_i^*(r',t)\phi_i(r,t) \tag{2}$$

donde p_i caracteriza la probabilidad de que el sistema esté en el estado $|i(t)>$ en un instante inicial $t=t_0$. Las probabilidades p_i son números positivos cuya suma es la unidad. El caso límite de un estado puro surge cuando solamente una de las p_i es no nula e igual a la unidad. La descripción más completa posible de un sistema cuántico corresponde a un estado puro.

Debe destacarse que en el caso de un estado puro, $\rho(r',r;t)$ contiene la misma información que la función de onda correspondiente, con la excepción de la fase global de la función de onda, que se cancela al evaluar la matriz densidad. En cualquier caso, esa fase global no es observable. Una forma equivalente de expresar la matriz densidad es mediante la transformada de Wigner, que se define como

$$\rho^W(r,p;t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int ds \exp(ips/\hbar)\rho(r-s/2,r+s/2;t) \tag{3}$$

La interpretación de la transformada de Wigner guarda mucha relación con la de la densidad en el espacio fásico. Su integral para los valores del momento nos da la distribución de probabililidad de la posición, mientras que su integral para los valores de las posición nos da la distribución de momentos. A diferencia de la densidad de espacio fásico, la transformada de Wigner no es siempre positiva. Ello nos recuerda que en un sistema cuántico no existe una probabilidad conjunta que tener un momento y una posición determinados. En mecánica clásica, la densidad de espacio fásico es una función definida positiva, que además puede ser arbitrariamente estrecha, tanto que en el límite corresponde a una única trayectoria clásica. Por el contrario, la representación de la matriz densidad a través de la transformada de Wigner ha de ser consistente con el principio de indeterminación. Por tanto, aún en el caso de un estado puro, la distribución de coordenadas y la de momentos no pueden ser arbitrariamente estrechas.

La evolución de la densidad en el espacio fásico viene determinada por el hamiltoniano $H(r,p)$ a través de la Ecuación de Liouville, que puede expresarse en función de los corchetes de Poisson

$$\frac{d\rho^c(r,p;t)}{dt} = \{\rho^c(r,p;t), H(r,p)\} \tag{4}$$

La evolución temporal de la matriz densidad viene determinada por la evolución temporal de los estados $\phi_i(r,t)$. Dicha evolución viene determinada por el conmutador del propio operador densidad con el hamiltoniano, de forma que

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\rho}, H\right] \tag{5}$$

Es destacable la similitud formal entre la evolución clásica de la densidad en el espacio fásico dada por eq. (4) y la evolución cuántica del operador densidad dada por eq. (5).

Finalmente, vamos a considerar cómo se obtiene la descripción de un sistema a partir descripción del "universo", es decir, del propio sistema más el ambiente con el que ha podido interactuar. Consideremos primeramente el caso clásico. La densidad de espacio fásico del universo" viene dada por $\rho(r,p,R,P;t)$ donde r,p son las coordenandas y momentos del sistema y R,P son las del ambiente. Entonces, la densidad de espacio fásico del sistema viene dada por

$$\rho_s^c(r,p;t) = \int dRdP\rho^c(r,p,R,P;t) \tag{6}$$

Consideremos ahora el caso cuántico. El espacio de Hilbert del "universo" viene dado por el producto del espacio vectorial del sistema por el espacio vectorial del ambiente. El operador densidad del "universo" $\hat{\rho}(t)$ actúa sobre ese espacio producto. Para reducir dicho operador al espacio de Hilbert del sistema, hay que sumar los elementos de matriz con respecto a una base completa de estados del ambiente. Esta operación es la traza con respecto a los estados del ambiente. Por tanto,

$$\hat{\rho}_s(t) = Tr_a(\hat{\rho}(t)) \tag{7}$$

Si representamos la matriz densidad del universo mediante la transformada de Wigner del universo, puede obtenerse la del sistema como

$$\rho_s^W(r,p;t) = \int dRdP\rho^W(r,p,R,P;t) \tag{8}$$

De nuevo es destacable la similitud entre el caso clásico y el cuántico. No obstante, existe una diferencia conceptual muy importante. Imaginemos el caso ideal en el que el estado del universo fuera conocido perfectamente, sin ninguna incertidumbre. En el caso clásico, ello implicaría que la densidad de espacio fásico correspondería a un producto de funciones δ en las coordenadas y momentos del sistema y el ambiente. Al obtener la densidad de espacio fásico del sistema de nuevo obtendríamos funciones δ en las coordenadas del sistema, con lo cual el estado clásico del sistema queda conocido perfectamente. En el caso cuántico, el conocimiento perfecto del universo implica que la matriz densidad corresponde a un estado puro. No obstante, al calcular la traza con respecto a los estados del ambiente, el resultado para la matriz densidad del estado del sistema es en general una mezcla. Únicamente si el estado del universo factoriza en un estado del sistema por un estado del ambiente, la matriz densidad del sistema corresponde a un estado puro. No obstante, basta que en cualquier instante anterior haya habido alguna interacción entre el sistema y el ambiente para que no ocurra esa factorización, y los estados del ambiente esten entrelazados ("entangled") con los del sistema. Este hecho puede expresarse diciendo que, en mecánica cuántica, el "conocimiento más completo posible" del todo no implica el "conocimiento más completo posible" de una parte. Debe tenerse en cuenta que, en mecánica cuántica, el "conocimiento más completo posible" se refiere a que la matriz densidad corresponda a un estado puro.

Es importante destacar que, a no ser que un sistema cuántico haya sido preparado cuidadosamente, no es lícito describirlo mediante un hipotético estado puro. Debe ser descrito por una mezcla, para dar cuenta de todas las posibles interacciones que ha podido sufrir con el ambiente durante su historia. Ello es especialmente importante para sistemas macroscópicos, como detectores y gatos.

3 El gato de Schrödinger.

La paradoja de gato de Schrödinger es bien conocida, y ha sido ampliamente discutida en muchos textos. No obstante, bien merece una discusión en el contexto de este trabajo: Se coloca en una caja cerrada un único núcleo radiactivo, un detector, una ampolla de veneno y un gato. Si el núcleo decae, activa el detector, que rompe la ampolla y mata al gato. El experimentador aguarda a que transcurra la semivida del núcleo, y abre la caja. La predicción de la mecánica cuántica para este experimento es que hay un 50% de probabilidades de encontrar el gato vivo y un 50% de posibilidades de encontarlo muerto.

La paradoja surge de cómo, o cuándo, se pasa de una descripción cuántica del sistema a una descripción clásica y probabilística. Sin duda, la evolución del núcleo radiactivo viene descrita por la ecuación de Schrödinger, de forma que su estado vendrá dado por una combinación lineal del estado inicial (no decaído) y los estados del continuo que caracterizan su decaimiento. Suponiendo que también podemos describir el resto del sistema (detector, ampolla y gato) por estados cuánticos, llegaríamos a la conclusión de que el estado completo sería una combinación lineal de estados en los que el gato está vivo y en los que el gato está muerto. No obstante, no hay ninguna evidencia de que existan gatos en un estado que sea una combinación lineal de vivo y muerto.

La interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica elude la paradoja. Según esta interpretación, la mecánica cuántica sólo tiene sentido para describir las probabilidades de obtener un resultado de un aparato clásico de medida, en interacción con un sistema cuántico, pero no para hablar del sistema cuántico en sí mismo. Por tanto, hay que definir a priori cuál es el aparato clásico de medida, y cuál es el sistema cuántico. Siguiendo la ortodoxia de Copenhague, no sólo es inadecuado decir que el gato es una combinación de vivo y muerto, sino incluso que el núcleo está en una combinación de estado inicial y estados del continuo. En la situación descrita, los enunciados que se pueden afirmar dependen de cuál se considere como aparato clásico. Si éste es el detector, puede decirse "existe una probabilidad del 50% de que el detector haya disparado". Si el aparato es la ampolla, "existe una probabilidad del 50% de que la ampolla se haya roto". Si el aparato es el gato, "existe una probabilidad del 50% de que el gato haya muerto". Si queremos meter al gato dentro del sistema cuántico, entonces el experimentador pasaría a ser el aparato de medida, con lo cual diríamos "existe una probabilidad del 50% de que el experimentador vea el gato muerto".

La matriz densidad permite clarificar la situación. Puede decirse que el núcleo radiactivo está inicialmente en un estado puro, ya que para ello lo hemos seleccionado cuidadosamente. No obstante, tanto el detector, como el frasco de veneno, como, por supuesto, el gato, no estarán en un estado puro, sino en una mezcla de muchísimos estados. El sistema total (núcleo más detector más ampolla más gato) viene descrito por una matriz densidad

$$\rho^0 = \rho(V) = \sum_i p_i |N; V, i >< N; V, i| \tag{9}$$

donde N indica que el núcleo no ha decaído, V indica que el gato está vivo e i etiqueta todos los estados cuánticos compatibles con que el gato esté vivo. Nótese que el número de componentes será del orden del número de Avogadro, y p_i de su inverso. Ahora dejamos evolucionar el sistema. El núcleo pasa a un estado que es una combinación lineal $1/\sqrt{2}(|N > +|D >)$, donde D indica que el núcleo ha decaído. La componente $|D >$ interacciona con el detector no obstante, interacciona con el detector, haciendo que el estado producto $|D, V, i >$ evolucione a un estado $\exp(i\delta_i)|D, M, i >$, donde M indica que el gato está muerto, y donde la fase δ_i está relacionada con el producto de la energía de la interacción por el tiempo de la misma, dividida por $\hbar$. La fase δ_i es, en general, un número muy grande. Para la detección de una partícula, la energía típica del pulso de carga producido en el detector puede ser del orden de

$10^{-6}J$, y el tiempo del orden de $10^{-6}s$, con lo que δ_i es del orden de 10^{22}. Las distintas componentes i vendran caracterizados por factores $\exp(\delta_i)$ que son, en efecto, números aleatorios de módulo 1. Por tanto, después de la interacción, la matriz densidad viene descrita por

$$\rho^f = 1/2\rho(V) + 1/2\rho(M) + \rho^e(V, M) \tag{10}$$

donde

$$\rho(M) = \sum_i p_i |D, M, i >< D, M, i| \tag{11}$$

$$\rho^e(V, M) = 1/2 \sum_i p_i \left(\exp(i\delta_i)|D, M, i >< N, V, i| + \exp(-i\delta_i)|N, V, i >< D, M, i|\right) \tag{12}$$

$\rho^e(V, M)$ da cuenta del entrelazamiento entre los estados del núcleo y del gato, que es característico de la mecánica cuántica. Este término contiene las componentes en las que el núcleo está en una combinación lineal de estados ligado y decaído, y por tanto el gato está en una combinación de vivo y muerto. No obstante, la aleatoriedad de los factores de fase nos aseguran que la contribución de estos términos a cualquier observable que pudiéramos medir posteriormente será nula. Por tanto, la matriz densidad final es equivalente a

$$\rho^f = 1/2\rho(V) + 1/2\rho(M) \tag{13}$$

La interpretación de 13 es clara. Tenemos una mezcla estadística, con probabilidades del 50%, de que el núcleo no haya decaído y el gato esté vivo, y de que el núcleo haya decaído y el gato esté muerto. No hay nada paradójico en este resultado. Los términos que pudieran haber dado lugar a una combinación lineal de gato vivo y gato muerto provendrían de $\rho^e(V, M)$, pero este término se cancela debido a las fases aleatorias.

4 El problema de la medida.

Una de las cuestiones que causan más perplejidad a los estudiantes de física cuántica es el "postulado de la medida", que afirma que, como resultado de una medida, la función de onda "pasa" al autoestado correspondiente del operador de medida. El postulado de la medida parece implicar que la función de onda de un sistema cuántico tiene dos tipos de evolución temporal. Mientras no actúe sobre él un aparato de medida, la evolución viene determinada por la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación determinista. No obstante, cuando actúa sobre él un aparato de medida, la función de onda se proyecta sobre uno de los autoestados del operador de medida, la que corresponde al autovalor observado. En este caso, la evolución es no determinista, ya que el sistema puede acabar en uno cualquiera de los autoestados del operador de medida, con una probabilidad que viene dada por el solapamiento de la función de onda inicial con dicho autoestado.

La matriz densidad permite describir lo que ocurre durante la medida, sin necesidad de recurrir a una evolución diferente a la de la Ecuación de Schrödinger. Consideremos un sistema cuántico, que viene descrito por un espacio de Hilbert que tomamos, por simplicidad, de dimensión 2. Sean $\{|+>, |->\}$ una base de los estados de este espacio. Consideremos un aparato de medida. Este vendrá descrito por una matriz densidad, caracterizado por una multitud de estados $|0, i>, |P, i>, |M, i>$. El primer índice indica que el aparato de medida tiene un "puntero", es decir, una variable observable macroscópicamente. La posición inicial del puntero es 0, y esta puede cambiar a P (plus) o a M (minus) cuando se interacciona con el sistema cuántico. El segundo índice i caracteriza la multitud de estados del aparato de medida compatibles con la indicación del puntero.

El sistema completo (aparato más sistema cuántico), antes de la interacción con el aparato de medida, podrá estar en cualquiera de los estados $|+; 0, i>$ o $|-; 0, i>$, o bien en una combinación de ellos. Durante la medida, el sistema interactúa con el aparato, de forma que el sistema completo evoluciona de $|+; 0, i>$ a $\exp(i\delta_i^+)|+; P, i>$, mientras que $|-; 0, i>$ evoluciona a $\exp(i\delta_i^-)|-; M, i>$.

Supongamos que, inicialmente, el estado del sistema viene dado por $|\phi >= a|+> +b|->$. Entonces, la matriz densidad total del sistema y el aparato parte de una situación inicial.

$$\rho^0 = \sum_i p_i|\phi; 0, i >< \phi, 0, i| \tag{14}$$

La evolución de esta matriz densidad viene determinada por la evolución de los estados descrita anteriormente. Debe mencionarse que dicha evolución está gobernada por la ecuación de Schrödinger. El resultado final para la matriz densidad es

$$\rho^f = |a|^2\rho(P) + |b|^2\rho(M) + \rho^e(P, M) \tag{15}$$

donde

$$\rho(P) = \sum_i p_i|+; P, i >< +; P, i| \tag{16}$$

$$\rho(M) = \sum_i p_i|-; M, i >< -; M, i| \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \rho^e(P, M) &= ab^* \sum_i p_i \exp(i\delta_i^+ - i\delta_i^-)|+; P, i >< -, M, i| \\ &+ ba^* exp(i\delta_i^- - i\delta_i^+)|-; M, i >< +; P, i| \end{aligned} \tag{18}$$

Por la misma argumentación del capítulo anterior, la suma de muchas contribuciones de fase aleatoria hacen que se cancele la contribución de $\rho^e(P, M)$ a cualquier observable. Por tanto, la matriz densidad final es equivalente, a todos los efectos, a

$$\rho^f = |a|^2\rho(P) + |b|^2\rho(M) \tag{19}$$

Como en el caso del gato de Schrödinger, el resultado es una mezcla estadística, con probabilidades $|a|^2$ y $|b|^2$, de obtener los estados $|+>$ y $|->$, con el aparato de medida indicando en su puntero la señas P y M, respectivamente.

Consideremos ahora el conocimiento del sistema cuántico que puede tener un observador racional. Una vez que observa el aparato de medida, debido a la correlación que hay entre la lectura del puntero y el estado del sistema, aumenta su conocimiento del sistema, y entonces puede inferir, en función del valor de su observación, si la matriz densidad es $\rho^(P)$ o $\rho^(M)$. No hay nada paradójico en este resultado. Una vez que la matriz densidad viene descrita por una mezcla estadística, tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica podemos aumentar nuestro conocimiento del sistema, y reducir el rango de estados de la matriz densidad a valores más restringidos.

Debe destacarse que, en esta descripción, la evolución de los estados del sistema, y la de los estados del aparato de medida, siguen siempre la ecuación de Schrödinger. La situación inicial es de un estado puro para el sistema, y de una mezcla para el aparato de medida. Tras la interacción, la situación es la de una mezcla de los estados del sistema con el aparato de medida, en la que existe una correlación entre los estados del sistema y los valores del puntero del aparato de medida. Esta situación permite que, cuando nuestro conocimiento del sistema se incremente, como resultado de conocer el valor del puntero, podamos restringir la matriz densidad a una de sus componentes, que corresponde a un estado determinado del sistema.

5 Correlaciones clásicas y correlaciones cuánticas

La diferencia más sutil, y quizás la más significativa, entre la mecánica clásica y la cuántica está en la naturaleza de las correlaciones entre los resultados de las medidas realizadas sobre sistemas que están separados, de forma que la medida que se realiza sobre uno de los sistemas no debiera afectar al otro.

En nuestra experiencia cotidiana, hay muchos ejemplos de correlaciones de este tipo. Cuando en España observamos que es de día, en Nueva Zelanda será de noche, y viceversa. Cuando en España es de día, es bastante probable, pero no seguro, que en Italia será de día. Este tipo de correlaciones pueden describirse en mecánica clásica mediante distribuciones de probabilidad conjuntas (o densidades en el espacio fásico) que se expresan como una suma ç (o una integral) de contribuciones que pueden expresarse como un producto de distribuciones de probabilidad de cada uno de los sistemas.

$$\rho(1,2) = \sum_n p_n \rho(1;n))\rho(2;n) \tag{20}$$

Esta expresión, en apariencia muy general, lleva consigo unas restricciones sobre los valores que pueden tomar las probabilidades conjuntas de medidas sobre los sistemas 1 y 2. Estas restricciones pueden expresarse en términos de las desigualdades de Bell.

En mecánica cuántica, la matriz densidad de un sistema compuesto no puede expresarse, en general, como (27). Cuando dos sistemas cuánticos 1 y 2 han estado alguna vez en interacción, aunque sea en un parado muy remoto, aparece un término asociado al entrelazamiento entre los estados de los sistemas 1 y 2. Así, en general, la matriz densidad para un sistema cuántico se expresa como

$$\rho(1,2) = \sum_n p_n \rho(1;n))\rho(2;n) + \rho^e(1,2) \tag{21}$$

El término $\rho^e(1,2)$ es responsable de que las correlaciones en sistemas cuánticos puedan violar las desigualdades de Bell.

Nótese que si alguno de los sistemas, o los dos, viniera descrito por una mezcla estadística de muchos estados (si fuera un gato, o un aparato de medida), entonces el término de entrelazamiento se cancelaría, debido a las fases aleatorias. Por tanto, se obtiene que las correlaciones clásicas, consistentes con las desigualdades de Bell, se pueden obtener de las correlaciones cuánticas, más permisivas, cuando se describe alguno de los sistemas por una matriz densidad que sea una mezcla de muchas componentes.

6 La paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen.

El ataque más formidable a la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica proviene de la paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen. Aunque la formulación original era diferente, la descripción más clara, debida a Bohm, se formula en términos de partículas con espín $1/2$.

Se parte de dos partículas de espín $1/2$, cuyos espines se acoplan a espín total cero. El estado de los espines de las partículas es, por tanto,

$$|\phi>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,+>|2,-> - |1,->|2,+>) \tag{22}$$

Las partículas se separan, conservando la misma función de onda de espín, de tal manera que, en un instante determinado, se mide la proyección del espín de una de las partículas. Inmediatamente, sin necesidad de realizar ninguna medida sobre la otra partícula, podemos conocer cual va a ser la proyección del su espín. Si se mide la proyección de la partícula 1, y resulta $+1/2$, sabemos que, cuando midamos la partícula 2 resultará $-1/2$ y viceversa. Este hecho, comprobado experimentalmente en muchos sistemas, no es en sí paradójico. Hay muchas situaciones clásicas en las que este tipo de correlaciones, o mejor dicho anticorrelaciones, ocurren.

El problema surge en el contexto de la interpretación de Copenhague. Según ésta, la proyección del espín de una partícula no es una realidad objetiva, hasta que no se mida por un aparato. No obstante, en la situación descrita, podemos prever con certeza el resultado de la medida de la proyección del espín de la partícula 2, una vez que hayamos medido la proyección de la partícula 1. El argumento de Einstein, Podolsky y Rosen parte de una definición de “realidad” que resulta dificil discutir: “Si, sin alterar un sistema en forma alguna, podemos predecir con certeza el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad física". Según este argumento, existe un elemento de realidad física en la proyección del espín de la partícula 2, aún cuando éste no se haya medido. En la interpretación de Copenhague, solamente podría hablarse de realidad cuando se hubiera medido dicha componente.

Por tanto, aceptando la definición EPR de realidad, existe un elemento de realidad física que no vendría descrita por la mecánica cuántica, ya que, para esta última, la matriz densidad de la partícula 2 viene dada por una mezcla de estados con proyecciones positivas y negativas, mientras que nosotros podemos conocer el valor concreto de la proyección del espín de 2, sin más que observar la partícula 1. Por tanto, la conclusión EPR es que la mecánica cuántica es una descripción incompleta de la realidad, que debe ser sustituída por una descripción que afirmara que la partícula 2 tiene proyección del espín es positivo, cuando tuvieramos la certeza de este hecho, al medir la partícula 1.

Vamos a describir este hecho haciendo uso de la matriz densidad. Inicialmente, el sistema tiene una matriz densidad dada por

$$\rho^0(1,2) = 1/2\rho^+(1)\rho^-(2) + 1/2\rho^-(1)\rho^+(2) + \rho^e(1,2) \qquad (23)$$

donde $\rho^\pm(1) = |1, \pm >< 1, \pm|$, $\rho^\pm(2) = |2, \pm >< 2, \pm|$, and

$$\rho^e(1,2) = -1/2|1,+ >< 1,-||2,- >< 2,+| - 1/2|1,- >< 1,+||2,+ >< 2,-| \qquad (24)$$

El sistema interactúa con un aparato de medida que actúa sobre la proyección del espín de la partícula 1. Su estado inicial viene dado por la matriz densidad $\rho^0(d1)$, y tras su interacción con la partícula 1 puede pasar a $\rho^\pm(d1)$. Utilizando los mismos argumentos utilizados en el punto anterior, después de la interacción pueden ignorarse los términos de la matriz densidad afectados de fases aleatorias, tenemos que la matriz densidad total tras la interacción es

$$\rho^f = 1/2\rho^+(1)\rho^-(2)\rho^+(d1) + 1/2\rho^-(1)\rho^+(2)\rho^-(d1) \qquad (25)$$

Por tanto, la matriz densidad del sistema completo pasa a ser una mezcla estadística. Si incrementamos nuestro conocimiento del sistema, mediante la observación del puntero, podemos deducir si la partícula 1 tiene proyección del espín $+1/2$, y por tanto la 2 tiene $-1/2$, o bien al contrario.

¿Dónde ha quedado la "paradoja" EPR en este argumento? Para EPR, la partícula 2, una vez que se encuentra suficientemente separada de la partícula 1, debe poder ser descrita de forma que tenga una proyección del espín bien definida. Lo mismo cabe decir de la partícula 1. En el lenguaje de la matriz densidad, ello implica que la matriz densidad del sistema, formado por dos partes separadas espacialmente, debe ser expresable como un producto, o bien una mezcla estadística de productos, de las matrices densidad de 1 y 2 correspondientes a proyección del espín bien definida. Para explicar las anti-correlaciones perfectas entre los resultados de las medidas de 1 y 2, hay que recurrir a la descripción del sistema completo como una mezcla estadística de estados con proyección del espín bien definida y opuesta para 1 y 2. No obstante, cuando si un sistema está definido por una mezcla estadística, entonces es que no tenemos un conocimiento completo del sistema. Si lo mejor que nos da la mecánica cuántica para describir un sistema es una mezcla estadística, entonces la mecánica cuántica es incompleta.

Para clarificar el concepto de "descripción incompleta", consideremos un sistema descrito por la matriz densidad

$$\rho^0_m = 1/2\rho^+(1)\rho^-(2) + 1/2\rho^-(1)\rho^+(2) \qquad (26)$$

Para este sistema, si realizamos la medida de la proyección del espín de la partícula 1, obtenemos en seguida el de la partícula 2, igual que en el caso anterior. De hecho, una vez realizada la medida de la proyección del espín de la partícula 1, la matriz densidad del sistema total es la misma que en el caso anterior. No obstante, en este caso, la descripción del sistema es "incompleta", en el sentido de que la matriz densidad es una mezcla estadística, y si tuviéramos más información, sin actuar sobre el sistema, podríamos saber cuál de los dos términos de la expresión describe "realmente" al sistema. Por contra, la matriz densidad descrita por eq. (23) corresponde a un estado puro, y no es reducible a sus términos sin modificar el sistema.

Nótese que las correlaciones que ocurren en el mundo habitual curresponden a una "descripción incompleta", en el sentido descrito por 26, (ver, por ejemplo "Bertlmann's socks and the nature of reality", by J.S.Bell). Por tanto, en el debate sobre la teoría cuántica, resulta crucial determinar si existe alguna diferencia entre las predicciones experimentales de una matriz densidad como (23), que corresponden a un estado puro, y las que corresponden a (26), que es una mezcla estadística, y, por tanto, una descripción incompleta. El experimento EPR no permite distinguir entre estas dos situaciones. La contribución de John Bell muestra que existen situaciones en las que ello sí puede hacerse.

7 Las desigualdades de Bell

El trabajo de John Bell plantea que existen correlaciones en la mecánica cuántica, entre sistemas separados espacialmente, que no pueden explicarse en términos de una matriz densidad que sea desarrollable como una mezcla estadística de matrices densidad factorizadas. Para ello, consideremos la medida de un observable que dependa de un cierto parámetro a, b (este puede ser el ángulo de un polarizador). Por simplicidad, consideramos que el observable puede tomar dos valores, $+$ y $-$ (por ejemplo, proyecciones $+1/2$ y $-1/2$ del espín con respecto al eje definido por a). En ese caso, podemos definir la probabilidad de que, para un sistema compuesto de dos partes separadas espacialmente, al medir la parte 1 con el parámetro a resulte el valor $+$, mientras que al medir la parte 2 con el parámetro b resulte $-$. Esta probabilidad conjunta, que llamamos $P(a, b; +, -)$, es distinta del producto de las probabilidades individuales si no hay correlaciones. No obstante, si las correlaciones entre el resultado de la medida de 1 y 2 se explican como una mezcla estadística de productos de matrices densidad de 1 y 2, los valores de $P(a, b; +, -)$ tienen fuertes correlaciones.

Tomemos un sistema compuesto por dos partes separadas espacialmente. Supongamos que la matriz densidad del sistema compuesto es una suma de productos de matrices densidad de las partes.

$$\rho_m^0 = \sum_n p_n \rho_1(n) \rho_2(n) \tag{27}$$

La probabilidad de que al medir sobre la parte 1 el observable definido por a resulte el valor $+$, y que al medir sobre la parte 2 el observable definido por b resulte $-$ es

$$P(a, b; +, -) = \sum_n p_n P_1(a, +, n) P_2(b, -, n) \tag{28}$$

Nótese que en el segundo término todos los factores de cada sumando son probabilidades, y tienen por tanto un valor positivo entre cero y uno. A partir de esta magnitud, puede definirse la correlación como

$$\begin{aligned} E(a, b) &= P(a, b; +, +) - P(a, b; +, -) - P(a, b; -, +) + P(a, b; -, -) && (29) \\ &= \sum_n p_n (P_1(a, +, n) - P_1(a, -, n))(P_2(b, +, n) - P_2(b, -, n)) && (30) \end{aligned}$$

Consideremos ahora las correlaciones entre medidas realizadas con distintos parámetros a, a' para la primera parte y b, b' para la segunda parte del sistema. Entonces, ha de cumplirse la desigualdad

$$|E(a, b) \mp E(a, b')| + |E(a', b) \pm E(a', b')| \leq 2 \tag{31}$$

La demostración de esta desigualdad se basa solamente en el hecho de que $0 \leq p_n \leq 1$ y $|P_1(a, +, n) - P_1(a, -, n)| \leq 1$. Aunque esta desigualdad fué formulada por Clauser, Holt, Horne y Shimony, es una generalización de una expresión obtenida previamente por J.S. Bell. Por ello, se conoce como las desigualdades de Bell.

Los sistemas clásicos satisfacen la desigualdad de Bell. En ellos, las matrices densidad de sistemas compuestos pueden siempre expresarse como 26, describiendo la matriz densidad de cada subsistema en función de las coordenadas y momentos de las partículas correspondientes. Entre los sistemas cuánticos consistentes en partes separadas espacialmente, aquellos cuya matriz densidad sea reducible como (26) satisfarán las desigualdades de Bell. No obstante, aquellos en los que exista entrelazamiento, como (23), pueden no satisfacer las desigualdades de Bell. En concreto, para el experimento pensado de Bohm-EPR, en el que se detecta la proyección del espín de dos partículas de espín $1/2$ acopladas al estado singlete, la predicción de la mecánica cuántica es que $E(a,b) = -cos(a-b)$. Para $a = 0, a' = 45, b = 90, b' = 135$, el valor del primer término de (31), utilizando los signos superiores, resulta $2\sqrt{2}$, con lo que se viola claramente la desigualdad.

Nótese que, incluso en el caso de sistemas cuánticos entrelazados, en cuanto una de las partes interacciona con un aparato de medida, según la expresion 25, el sistema pasa a ser descrito por una mezcla, de tipo 26. Por tanto, el entrelazamiento cuántico es una propiedad sutil que se destruye en cuanto se realiza una medida, o mejor dicho, en cuanto se realiza la interacción con un sistema complejo descrito por una mezcla estadística de muchos grados de libertad, que introduce fases aleatorias en la matriz densidad tras la interacción. Las consecuencias observables del entrelazamiento aparecen cuando comparamos los resultados de medidas diferentes sobre sistema entrelazados idénticos. Por ejemplo, el estado singlete descrito en la sección anterior, puede ser descrito en función de las proyecciones a lo largo de cualquier eje, caracterizado por los ángulos b o b'.

$$|\phi_s >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|b,1,+>|b,2,-> - |b,1,-> |b,2,+>) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b',1,+>|b',2,-> - |b',1,-> |b',2,+>) \tag{32}$$

Cuando la parte 2 interacciona con el aparato de medida caracterizado por el ángulo b, el sistema completo pasa a venir descrito por una mezcla estadística en la que las partículas 1 y 2 pasan a tener proyecciones del espín definidas con respecto al eje b. Sin embargo, si la parte 2 interaccionara con un aparato con ángulo b', el sistema pasaría a ser una mezcla estadística con proyecciones definidas con respècto a b'. Por tanto, aunque después de la medida el sistema pase a ser descrito por una mezcla, dicha mezcla es diferente según el observable que se mida en la parte 2, y ello produce que se violen las desigualdades de Bell por los sistemas entrelazados.

8 Resumen y conclusiones.

¿Es la mecánica cuántica realmente tan rara? La respuesta a esta pregunta es necesariamente subjetiva. Lo que a unos puede parecer raro, puede no serlo para otros. El lector de estas líneas tendrá, probablemente, un concepto de "raro" que no coincidirá con el del que las escribe. No obstante, lo que se pretende en estas líneas es mostrar que, cuando se estudian los problemas de la mecánica cuántica con el lenguaje la matriz densidad, no resulta "tan rara".

El argumento principal de este trabajo es que los sistemas macroscópicos habituales, como gatos y detectores (incluso nosotros mismos) son sistemas cuánticos. No obstante, su descripción debe realizarse mediante una mezcla estadística de muchos estados cuánticos, y no mediante un hipotético estado puro. Ello hace que el entrelazamiento cuántico, que es responsable de las "rarezas" de la mecánica cuántica, desaparezcan cuando se consideran sistemas macroscópicos.

En el caso del gato de Schrödinger, si tenemos en cuanta que el gato (y la cápsula del veneno, y el detector), deben venir descritos inicialmente por una mezcla y no por un estado puro, llegamos a la conclusión que, al final, siguen descritos por una mezcla, con un 50% de probabilidad de seguir vivo y un 50% de probabilidad de haber muerto.

En el problema de la medida, no tenemos que suponer que el estado del sistema "salta" a un autoestado del operador de medida. Simplemente, la situación inicial, que es un estado puro para el sistema pero una mezcla para el aparato, evoluciona hacia una mezcla en la que existe una correlación perfecta entre los punteros del aparato y los autoestados del operador de medida. El conocimiento del puntero permite reducir la matriz densidad a la componente que corresponde al autoestado concreto del operador de medida.

Las correlaciones cuánticas, que llevan a violaciones de las desigualdades de Bell son una consecuencia directa del entrelazamiento cuántico. Estas correlaciones especiales desaparecen cuando se considera un sistemas macroscópicos.

En la opinión del autor, lo único que es realmente raro de la mecánica cuántica es el entrelazamiento cuántico. El entrelazamiento cuántico implica que no pondemos conocer las propiedades de un sistema compuesto estudiando sus partes, ni aún cuando estas partes están completamente separadas. Existen propiedades de las correlaciones de los dos sistemas que no pueden ser descritas en términos de incertidumbres probabilísticas. No obstante, parece claro que el entrelazamiento, aunque raro, es real, y puede ser utilizado tecnológicamente, en aplicaciones como la criptografía.

Admitido que el entrelazamiento cuántico existe, cabe preguntarse por qué no aparece en nuestro mundo habitual, macroscópico. La respuesta puede darla el formalismo de la matriz densidad. Los objetos macroscópicos, los aparatos de medida, y nosotros mismos, no podemos ser descritos por estados puros, sino por mezclas, en las que la contribución del entrelazamiento se diluye por una cancelación de fases aleatorias.